перший рівень

**1**. Задано однорідне рівняння теплопровідності в області $x \in (0, \infty)$, $t > 0$, початкову умову та однорідну крайову умову другого роду. Для того, щоб записати розв'язок цього рівняння за допомогою фундаментального розв'язку, необхідно початкову умову...

A продовжити непарно на область $x < 0$;
B продовжити парно на область $x < 0$;
C поділити на 2 при $x < 0$;
D вважати рівними нулю в області $x < 0$. (1 бал)

**2**. Вказати фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа на площині.

A $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; B $\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; C $\ln \frac{1}{x^2+y^2}$; D $\frac{1}{x^2+y^2}$. (1 бал)

**3**. Для розв'язування задачі на півпрямій з однорідною крайовою умовою першого роду за допомогою інтегрального перетворення, необхідно робити по просторовій змінній...

A синус-перетворення Фур'є;
B косинус-перетворення Фур'є;
C перетворення Фур'є;
D перетворення обернених радіус-векторів. (1 бал)

**4**. Розв'язок диференціального рівняння $u_t(M,t) = a^2\Delta u(M,t) + f(M,t)$, $M \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, з початковою умовою: $u(M,0) = 0$, $M \in \mathbb{R}^3$ можна представити так: $u(M,t) = \int\limits_0^t R(M,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau$, де функція $R(M,t,\tau)$ є розв'язком задачі...

A $R_t(M,t,\tau) = a^2\Delta R(M,t,\tau) + f(M,t)$, $M \in \mathbb{R}^3$, $t > \tau$; $R|_{t=\tau} = 0$, $M \in \mathbb{R}^3$;
B $R_t(M,t,\tau) = a^2\Delta R(M,t,\tau) + f(M,t)$, $M \in \mathbb{R}^3$, $t > \tau$; $R|_{t=\tau} = f(M,\tau)$, $M \in \mathbb{R}^3$;
C $R_t(M,t,\tau) = a^2\Delta R(M,t,\tau)$, $M \in \mathbb{R}^3$, $t > \tau$; $R|_{t=\tau} = f(M,\tau)$, $M \in \mathbb{R}^3$;
D $R_t(M,t,\tau) = a^2\Delta R(M,t,\tau)$, $M \in \mathbb{R}^3$, $t > \tau$; $R|_{t=\tau} = 0$, $M \in \mathbb{R}^3$. (1 бал)

другий рівень

**5**. Знайти розв'язок задачі Штурма-Ліувілля: $y''(x) + \lambda y(x) = 0$, $-l < x < l$, $y(-l) = y'(l) = 0$.

A $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2l}\right)^2$, $y_n(x) = \sin\frac{\pi n(x+l)}{2l}$, $n = 1, 2, \ldots$;
B $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2l}\right)^2$, $y_n(x) = \sin\frac{\pi n(x-l)}{2l}$, $n = 1, 2, \ldots$;
C $\lambda_n = \left[\frac{\pi(2n+1)}{4l}\right]^2$, $y_n(x) = \sin\frac{\pi(2n+1)(x+l)}{4l}$, $n = 0, 1, \ldots$;
D $\lambda_n = \left[\frac{\pi(2n+1)}{4l}\right]^2$, $y_n(x) = \sin\frac{\pi(2n+1)(x-l)}{4l}$, $n = 0, 1, \ldots$. (3 бали)

**6**. Знайти $v(x,y)|_{y=0}$, де $v(x,y)$ — гармонічно спряжена функція до функції $u(x,y) = \operatorname{sh} x \sin y$.

A $v(x,y)|_{y=0} = -\operatorname{ch} x + \mathrm{const}$; B $v(x,y)|_{y=0} = \operatorname{ch} x + \mathrm{const}$;
C $v(x,y)|_{y=0} = -\operatorname{sh} x + \mathrm{const}$; D $v(x,y)|_{y=0} = \operatorname{sh} x + \mathrm{const}$. (3 бали)

**7**. Знайти значення розв'язку інтегрального рівняння $y(x) = \mathrm{e}^{-2x} + \int\limits_0^\infty (\mathrm{e}^{-2s} + \mathrm{e}^{-2x-s})\, y(s)\mathrm{d}s$ в точці $x = 0$.

A 0; B 1; C 3; D 9. (3 бали)

**8**. Знайти значення константи $k$, при якому функція $\exp(2x)\operatorname{ch}(ky)$ є гармонічною.

A $k = \pm 2\mathrm{i}$; B $k = \pm 2$; C $k = 0$; D $k = 1$. (3 бали)

**9**. Розв'язати задачу (використавши власні функції та власні значення задачі **5**)

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + A\mathrm{e}^{-t} \sin \frac{7\pi(x+l)}{4l}, \quad -l < x < l, \quad t > 0, \quad A = \mathrm{const}\,,$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad -l < x < l,$$
$$u(-l,t) = u_x(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

6 балів

**10**. Використовуючи перетворення Лапласа, розв'язати задачу

$$u_t(x,t) + \alpha u_x(x,t) = f(t),\ 0 < x, t < \infty,\ \alpha > 0;$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty;$$
$$u(0,t) = 0, \quad 0 < t < \infty.$$

6 балів

**11**. $\rho(r) = r^2$ — розподіл густини електричного заряду кулі. Знайти об'ємний електростатичний потенціал, який створюється кулею. $R$ — радіус кулі, $r$ — відстань до центру кулі. 6 балів

**12**. Розв'язати задачу

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = \sin(\alpha x), \quad 0 < x < \infty,$$
$$u(0,t) = 0, \quad t > 0.$$

6 балів

*Зав. каф. ПМ* *проф. Костробій П. П.,* *лектор* *доц. Маркович Б. М.*