

1. Задано однорідне хвильове рівняння в області  $x \in (0, \infty)$ ,  $t > 0$ , початкові дані та однорідну крайову умову другого роду. Для того, щоб записати розв'язок цього рівняння за допомогою формули Даламбера, необхідно початкові дані...

- А продовжити непарно на область  $x < 0$ ;  
 В продовжити парно на область  $x < 0$ ;  
 С поділити на  $2a$  при  $x < 0$  ( $a^2 = T/\rho$ , де  $T$  — сила натягу струни,  $\rho$  — густина маси струни);  
 D вважати рівними нулю в області  $x < 0$ . 1 бал

2. При якій умові однорідна крайова умова першого роду не впливає на відхилення напівобмеженої струни в точці  $x$  ( $x \in (0, \infty)$ ) в момент часу  $t$  ( $t > 0$ )?

- А крайова умова завжди впливає на відхилення струни;  
 В крайова умова не впливає на відхилення струни;  
 С  $x < at$  ( $a^2 = T/\rho$ , де  $T$  — сила натягу струни,  $\rho$  — густина маси струни);  
 D  $x > at$  ( $a^2 = T/\rho$ , де  $T$  — сила натягу струни,  $\rho$  — густина маси струни). 1 бал

3. Розв'язок диференціального рівняння

$$\rho(M)u_{tt}(M, t) = L u(M, t) + f(M, t), \quad M \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

де  $L = \operatorname{div}(k(M)\nabla) - q(M)$ , з початковими умовами:  $u(M, 0) = 0$ ,  $u_t(M, 0) = 0$ ,  $M \in \mathbb{R}^3$  можна представити у такому вигляді:  $u(M, t) = \int_0^t R(M, t, \tau) d\tau$ , де функція  $R(M, t, \tau)$  є розв'язком задачі...

- А  $\rho(M)R_{tt}(M, t, \tau) = L R(M, t, \tau)$ ,  $R(M, \tau, \tau) = 0$ ,  $R_t(M, \tau, \tau) = f(M, \tau)/\rho(M)$ ;  
 В  $\rho(M)R_{tt}(M, t, \tau) = L R(M, t, \tau) + f(M, \tau)$ ,  $R(M, \tau, \tau) = 0$ ,  $R_t(M, \tau, \tau) = f(M, \tau)/\rho(M)$ ;  
 С  $\rho(M)R_{tt}(M, t, \tau) = L R(M, t, \tau)$ ,  $R(M, \tau, \tau) = 0$ ,  $R_t(M, \tau, \tau) = f(M, \tau)$ ;  
 D  $\rho(M)R_{tt}(M, t, \tau) = L R(M, t, \tau) + f(M, \tau)$ ,  $R(M, \tau, \tau) = 0$ ,  $R_t(M, \tau, \tau) = 0$ . 1 бал

4. Записати потенціальну енергію струни, яка здійснює малі поперечні коливання  $u(x, t)$ , якщо струна знаходиться в полі зовнішньої сили з лінійною густиною  $F(x, t)$ , на лівий кінець ( $x = 0$ ) діє сила  $F_L(t)$ , а правий ( $x = l$ ) — пружно закріплений ( $\sigma$  — коефіцієнт жорсткості кріплення);  $T$  — сила натягу струни, струна знаходиться на осі  $x$  від 0 до  $l$ .

- А  $\frac{1}{2}T \int_0^l u_x^2(x, t) dx - \int_0^l F(x, t)u(x, t) dx - F_L(t)u(0, t) + \frac{1}{2}\sigma u^2(l, t)$ ;  
 В  $\frac{1}{2}T \int_0^l u_x^2(x, t) dx - \int_0^l F(x, t)u(x, t) dx - F_L(t)u(0, t) + \frac{1}{2}\sigma u_x^2(l, t)$ ;  
 С  $\frac{1}{2}T \int_0^l u_{xx}^2(x, t) dx - \int_0^l F(x, t)u(x, t) dx - F_L(t)u_x(0, t) + \frac{1}{2}\sigma u_x^2(l, t)$ ;  
 D  $T \int_0^l u_x^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_0^l F(x, t)u(x, t) dx - \frac{1}{2}F_L(t)u(0, t) + \frac{1}{2}\sigma u^2(l, t)$ . 1 бал

5. Задано функцію  $u(x, y)$  та її похідну  $u_y(x, y)$  на кривій  $y(x) = \sin x$ :

$$u(x, y)|_{y=\sin x} = \cos(2x), \quad u_y(x, y)|_{y=\sin x} = -2 \sin x.$$

Знайти похідну  $u_x(x, y)$  на цій кривій.

- А 0;  В  $\sin(2x)$ ;  С  $-\sin(2x)$ ;  D  $\cos(2x)$ . 3 бали

6. Знайти розв'язок задачі

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$u(0, t) = \sin(\alpha t), \quad t > 0$$

в точці  $x = 2at$ .

A  $\sin(\alpha t)$ ;       B  $-\sin(\alpha t)$ ;       C  $0$ ;       D  $-\sin(2\alpha t)$ .

3 бали

7. Знайти розв'язок задачі

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + 2x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = a \cos x, \quad -\infty < x < +\infty$$

в момент часу  $t = 2\pi/a$ .

A  $0$ ;       B  $x$ ;       C  $\left(1 + \frac{4\pi^2}{a^2}\right)x + \cos x$ ;       D  $\left(1 + \frac{4\pi^2}{a^2}\right)x$ .

3 бали

8. Знайти вирази для елементів об'єму та квадрату довжини в циліндричній системі координат.

A  $dv = \rho d\rho d\varphi dz, (dl)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\varphi)^2 + (dz)^2$ ;

B  $dv = \rho \sin^2 \varphi d\rho d\varphi dz, (dl)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi (d\varphi)^2 + (dz)^2$ ;

C  $dv = \rho d\rho d\varphi dz, (dl)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi (d\varphi)^2 + (dz)^2$ ;

D  $dv = \rho \sin^2 \varphi d\rho d\varphi dz, (dl)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\varphi)^2 + (dz)^2$ .

3 бали

ТРЕТІЙ РІВЕНЬ

9. Розв'язати задачу

$$u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) + 2u_x(x, y) + 2u_y(x, y) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y > 0,$$

$$u(x, y)|_{y=0} = x, \quad u_y(x, y)|_{y=0} = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

6 балів

10. Розв'язати задачу

$$u_{xx}(x, y) + y u_{yy}(x, y) + \frac{1}{2} u_y(x, y) = 0, \quad x > 0, \quad -\frac{1}{4} x^2 < y < 0,$$

$$u(x, y)|_{y=0} = 0, \quad u(x, y)|_{y=-x^2/4} = x^2, \quad x > 0.$$

6 балів

11. Розв'язати задачу

$$u_{tt}(x, y, t) = a^2 \Delta_2 u(x, y, t) + x y t, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = x^2 + y^2, \quad u_t(x, y, 0) = x y, \quad -\infty < x, y < +\infty,$$

де  $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

6 балів

12. Знайти відхилення  $u(x, t)$  поперечних перерізів однорідного стержня при рівних нулю початкових умовах, якщо лівий ( $x = 0$ ) кінець стержня є жорстко закріплений, а правий ( $x = l$ ) — рухається за заданим законом:  $u(l, t) = \mu(t)$ . Стержень розміщений на осі  $x$  від 0 до  $l$ .

6 балів