

## Екзаменаційний білет №1

ПЕРШИЙ РІВЕНЬ

1. Встановити тип диференціального рівняння в частинних похідних такої задачі:

$$4u_{xx} + 10u_{xy} + 4u_{yy} - 2u_x - u_y = 0, \quad y < 0, \quad x > 0;$$

$$u|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=0} = e^{\frac{1}{3}y}, \quad y < 0.$$

А гіперболічний;  В еліптичний;  С параболічний;  D змішаний. 2 бали

2. Розв'язати задачу Штурма-Ліувілля

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad y(0) = y(l) = 0.$$

А  $y_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}, \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ ;  В  $y_n(x) = \cos \frac{\pi n x}{l}, \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ ;  
 С  $y_n(x) = \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2l}, \lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2$ ;  D  $y_n(x) = \cos \frac{\pi(2n+1)x}{2l}, \lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2$ . 2 бали

3. Знайти значення константи  $k$ , при якому функція  $y^3 + ky^2 - yx^2$  є гармонічною.

А  $k = 0$ ;  В  $k = 2$ ;  С  $k = -2$ ;  D  $k = -2i$ . 2 бали

4. Задано:  $u(x, y)|_{y=2x} = x^3$ ,  $u_y(x, y)|_{y=2x} = x^2$ . Знайти  $u_x(x, y)|_{y=2x}$ .

А  $3x^2$ ;  В  $x^2$ ;  С  $2$ ;  D  $2x^4$ . 2 бали

5. Знайти розв'язок задачі

$$u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$u(0, t) = \sin(2t), \quad t > 0$$

в точці  $t = 3x$ .

А  $-\sin(2x)$ ;  В  $0$ ;  С  $\sin(6x)$ ;  D  $\sin(5x)$ . 2 бали

ДРУГИЙ РІВЕНЬ

6. Ввівши нові змінні  $(\xi, \eta)$ , звести диференціальне рівняння в частинних похідних із завдання 1 до канонічного вигляду.

А  $u_{\xi\eta} - \frac{1}{3}u_{\xi} = 0$ ;  В  $u_{\xi\eta} + \frac{1}{3}u_{\xi} = 0$ ;  С  $u_{\xi\eta} = 0$ ;  D  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$ . 5 балів

7. Задано гармонічну функцію  $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$  в області  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Знайти мінімальне та максимальне значення функції  $u(x, y)$  в цій області.

А  $u_{\min} = 0, u_{\max} = 2$ ;  В  $u_{\min} = -\frac{9}{8}, u_{\max} = 4$ ;  
 С  $u_{\min} = -\frac{9}{8}, u_{\max} = 2$ ;  D  $u_{\min} = 0, u_{\max} = 4$ . 5 балів

8. Знайти розв'язок задачі

$$u_{tt}(x, t) = 9u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad 0 < x < \infty,$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

в точці  $x = t$ .

А  $10t^2 + t$ ;  В  $6t^2 + t$ ;  С  $6t^2 + \frac{1}{3}t$ ;  D  $10t^2 + \frac{1}{3}t$ . 5 балів

9. У тривимірному випадку знайти електростатичний потенціал у точці  $r = 2R$ , який створюється зарядженою кулею з радіусом  $R$ . Густина розподілу заряду кулі  $\rho(r) = r^2$ , де  $r$  – віддаль від розглядуваної точки до центру кулі.

А  $2\pi/5R^4$ ;  В  $(1 - 2^4/5)\pi R^4$ ;  С  $-\frac{1}{2}\pi R^4$ ;  D  $\frac{1}{2}\pi R^4$ . 5 балів

10. Знайти значення розв'язку інтегрального рівняння  $y(x) = x + 3 \int_0^x (s + xs^2) y(s) ds$  в точці  $x = 1$ .

А  $\frac{1}{3}$ ;

В  $-\frac{1}{3}$ ;

С 0;

D 1.

5 балів

ТРЕТІЙ РІВЕНЬ

11. Знайти розв'язок задачі Коші із завдання 1.

9 балів

12. Використовуючи власні функції задачі 2, знайти розв'язок задачі

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) + 10e^{-t} \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x, t)|_{t=0} = 5 \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad u_t(x, t)|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0.$$

9 балів

13. Використовуючи перетворення Лапласа, розв'язати задачу

$$u_{xx}(x, t) + u_{xt}(x, t) = 0, \quad 0 < x, t < \infty;$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad 0 < x < \infty;$$

$$u(0, t) = e^{-t}, \quad u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < \infty.$$

9 балів

14. Використовуючи перетворення Фур'є, знайти розв'язок задачі

$$u_t(x, t) + u_x(x, t) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = 2e^{-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

9 балів

15. Використовуючи функцію джерела, представити розв'язок задачі

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) - hu(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ x^2, & 0 < x < l, \\ 0, & l < x < +\infty \end{cases}$$

через функцію похибок.

9 балів

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики (протокол № 5 від 30.11.2006)

Зав. каф. ПМ

Костробій П. П., екзаменатор

Маркович Б. М.